Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungssekretariat

Diplomprüfung

Finanzmarktökonometrie: Zeitreihenanalyse

Sommersemester 2010

Dr. Martin Becker

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

B i t t e b e a c h t e n S i e F o l g e n d e s:

1. Kleben Sie bitte Ihr Namensschild auf die dafür vorgesehene Markierung **auf dem Deckblatt des Klausurhefts**!
2. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an den dafür vorgesehenen Stellen **auf das Deckblatt der Aufgabensammlung (diese Seite)**!
3. Legen Sie einen Lichtbildausweis an Ihrem Platz aus.
4. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben mit insgesamt $120 = 21 + 20 + 17 + 28 + 18 + 16$ Punkten. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
5. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben kann beliebig gewählt werden.
6. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
7. Die Benutzung von zwei beidseitig beschriebenen bzw. vier einseitig beschriebenen DIN A4-Blättern sowie Taschenrechnern ist erlaubt.
8. **Aufgabe 1 ist in der Aufgabensammlung zu bearbeiten. Die Aufgabensammlung ist daher zusammen mit dem Klausurheft abzugeben!**

Aufgabe 1 (21 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte.
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

	wahr	falsch
1. Die ACF eines AR(1)-Prozesses $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\phi \neq 0)$ klingt exponentiell ab und ist für negative Koeffizienten ϕ alternierend.	☐	☐
2. Die ACF zum Lag 1 eines MA(1)-Prozesses $X_t = \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ nimmt für $\theta = 1$ ihr Maximum und für $\theta = -1$ ihr Minimum an.	☐	☐
3. Jeder AR(p)-Prozess ist mittelwertergodisch.	☐	☐
4. Jeder AR(1)-Prozess ist ein Martingal.	☐	☐
5. Bei q-korrelierten Prozessen ist die PACF ab dem Lag $q+1$ gleich 0.	☐	☐
6. Ein Random Walk mit Startwert x und Drift α ist ein ARIMA$(0,1,0)$-Prozess.	☐	☐
7. Es sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein nicht deterministischer schwach stationärer Prozess. Der Woldsche Zerlegungssatz liefert eine Zerlegung von X in eine rein nicht-deterministische Komponente U und eine deterministische Komponente V mit $$X_t = U_t + V_t \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(U_s, V_t) \neq 0 \quad \forall s,t \in \mathbb{Z}\ .$$	☐	☐

Aufgabe 2 (12 + 8 = 20 Punkte)

a) Es sei ein MA-Prozess gegeben, dessen ACVF $\gamma_X(h)$ in Abhängigkeit von h folgende Werte annimmt:

$$\gamma_X(1) = -2 \qquad \gamma_X(2) = 1 \qquad \gamma_X(3) = -1 \qquad \gamma_X(h) = 0 \quad \forall h \geq 4$$

i) Welche Ordnung hat der beschriebene MA-Prozess? (Begründung!)

ii) Nehmen Sie an, dass $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ gilt. Geben Sie die Parametervektoren zu den beiden möglichen MA-Prozessen an, die (für $\sigma_\varepsilon^2 = 2$) zu der oben angegebenen ACVF-Struktur führen.

b) Ist der folgende ARMA(2,2)-Prozess kausal beziehungsweise invertierbar bezüglich ε ?

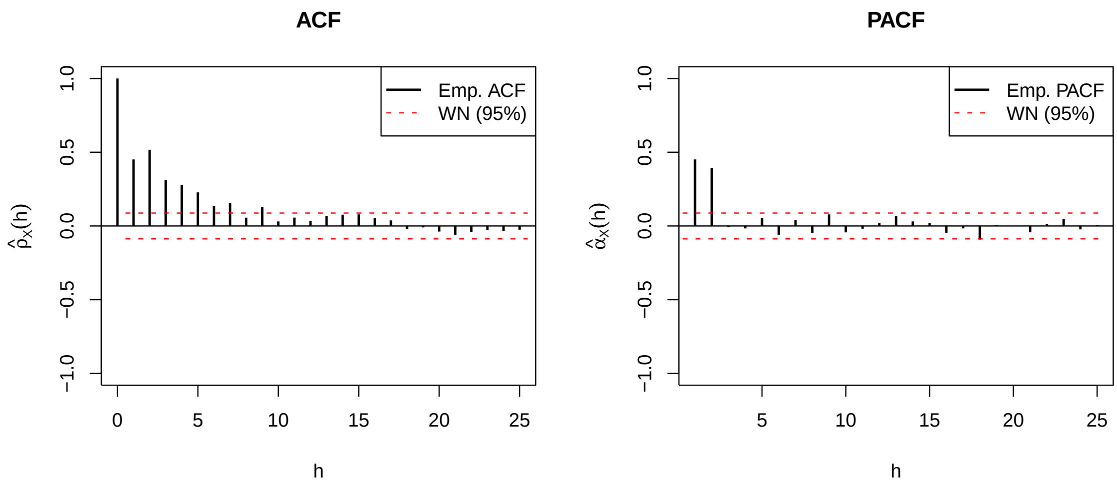
$$X_t = -2X_{t-1} + X_{t-2} + \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{3}{4}\varepsilon_{t-2}$$

Aufgabe 3 (6 + 4 + 7 = 17 Punkte)

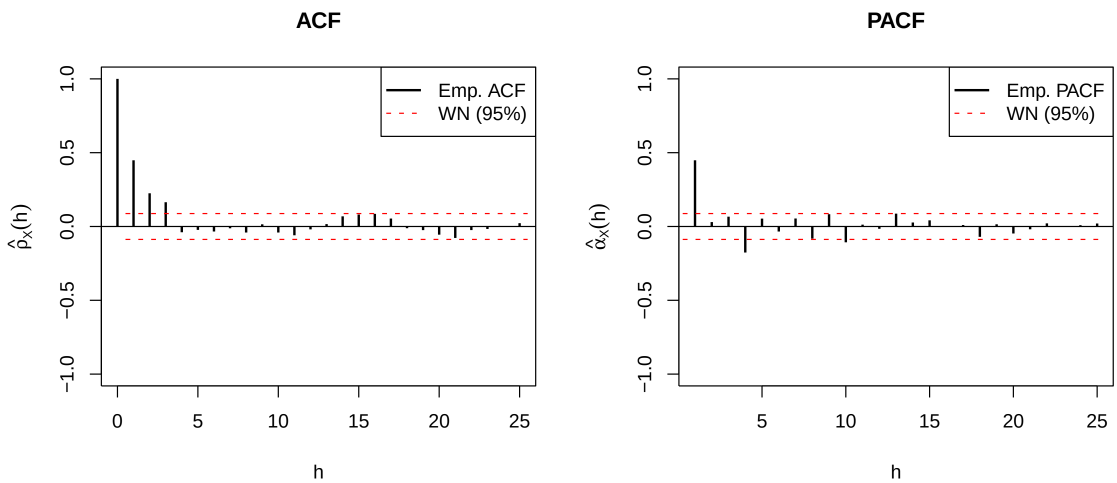
a) Wie lässt sich die Ordnung *reiner* AR(p)- und MA(q)-Prozesse mit Hilfe der ACF beziehungsweise PACF bestimmen? Wie verhalten sich ACF und PACF bei einem ARMA(p, q)-Prozess ?

b) Im Folgenden sind zu Pfaden von zwei stochastischen Prozessen jeweils die empirische ACF sowie PACF dargestellt. Um welchen Prozess könnte es sich jeweils handeln und wie könnte die zugehörige Ordnung lauten ?

Prozess 1



Prozess 2



c) Für einen beobachteten Pfad der Länge $n = 300$ eines stochastischen Prozesses X liegen folgende Werte für die Autokorrelationskoeffizienten bis zum Lag 4 vor:

h	0	1	2	3	4
$\widehat{\rho}_X(h)$	1	-0.07277	-0.00068	-0.02252	-0.01077

Führen sie einen Ljung-Box-Test zum maximalen Lag $m = 4$ und zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch. Was testet der Ljung-Box-Test und zu welcher Entscheidung kommt er in diesem Fall? Worin bestehen die Unterschiede zum Box-Pierce- bzw. McLeod-Li-Test?

Hinweis:
Für die Entscheidung stehen Ihnen die folgenden 95%-Quantile der $\chi^2(k)$-Verteilung zur Verfügung

k	1	2	3	4	5	6	7
$\chi^2_{k;0.95}$	3.8415	5.9915	7.8147	9.4877	11.0705	12.5916	14.0671

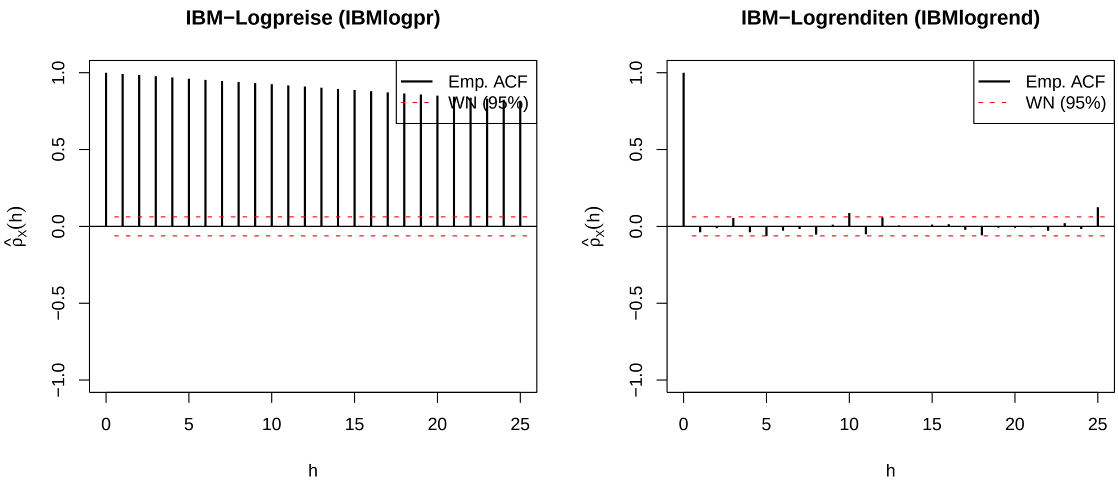
Aufgabe 4 (4 + 8 + 4 + 4 + 8 = 28 Punkte)

a) Nennen Sie kurz möglichst viele *Stylized Facts* von Finanzmarktdaten.

b) Aus den Schlusskursen der IBM-Aktie innerhalb des Zeitraums 2006-07-01 bis 2010-06-30 (n=1006 Beobachtungen) wurden die resultierenden Zeitreihen der Log-Preise (`IBMlogpr`) sowie der Log-Renditen (`IBMlogrend`) berechnet.

   i) Welche Beziehung besteht zwischen der Zeitreihe der Log-Preise und der der Log-Renditen?

   ii) Die beiden folgenden Plots zeigen die empirische ACF der Log-Preise beziehungsweise der Log-Renditen



   Sollte man bei den Log-Preisen von einer integrierten Zeitreihe ausgehen? Hierzu wurde zusätzlich mit R ein (Augmented) Dickey-Fuller-Test auf `IBMlogpr` durchgeführt:

```
        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  IBMlogpr
Dickey-Fuller = -2.2889, Lag order = 10, p-value = 0.456
alternative hypothesis: stationary
```

   Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Plots der empirischen ACF und ergänzend mit dem Ergebnis des ADF-Tests.

c) Zusätzlich wurde nun die Zeitreihe der Beträge der Log-Renditen (`absIBMlogrend`) berechnet. Mit Hilfe der Software R wurden Ljung-Box-Tests sowohl für `IBMlogrend` als auch für `absIBMlogrend` durchgeführt:

```
        Box-Ljung test

data:  IBMlogrend
X-squared = 1.4735, df = 1, p-value = 0.2248

        Box-Ljung test

data:  absIBMlogrend
X-squared = 66.3015, df = 1, p-value = 3.331e-16
```

Welche typischen Eigenschaften von Finanzzeitreihen werden durch diese Ergebnisse bekräftigt?

d) Weiter wurde ein Ljung-Box-Test für die Zeitreihe der quadrierten Log-Renditen (`qIBMlogrend`) durchgeführt.

```
        Box-Ljung test

data:  qIBMlogrend
X-squared = 38.1977, df = 1, p-value = 6.393e-10
```

Kann auf Grundlage des Testergebnisses davon ausgegangen werden, dass ARCH-Effekte in der Zeitreihe der Log-Renditen vorliegen? (Begründung!)

e) Schließlich wurde mit R ein GARCH-Modell an `IBMlogrend` angepasst:

```
Call:
garch(x = IBMlogrend, order = c(1, 1), trace = FALSE)

Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.13637 -0.52787  0.04623  0.63897  5.25582

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 6.175e-06   1.498e-06    4.121 3.77e-05 ***
a1 1.142e-01   1.854e-02    6.161 7.23e-10 ***
b1 8.636e-01   2.055e-02   42.018  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Diagnostic Tests:
        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.0976, df = 1, p-value = 0.7547
```

i) Welche Ordnung hat das geschätzte Modell?

ii) Geben Sie das geschätzte Modell an. Ist die Varianz endlich? (Begründung!)

iii) Nehmen Sie kurz Stellung zu dem Ergebnis des Ljung-Box-Tests im Output.

Aufgabe 5 (6 + 2 + 6 + 4 = 18 Punkte)

Es sei der Prozess Z_t gegeben durch

$$Z_t = x + at + \sum_{n=1}^{t} \varepsilon_n + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \qquad (t \geq 1) \ ,$$

wobei ε_t ein Weißes Rauschen und $a, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ist mit $a \neq 0$.

a) Berechnen Sie die Differenzen ΔZ_t (für $t \geq 2$) und $\Delta^2 Z_t$ (für $t \geq 3$).
(Hinweis: $\Delta Z_t := Z_t - Z_{t-1}$, $\Delta^2 Z_t := \Delta(\Delta(Z_t))$)

b) Welche Prozesse ΔZ_t und $\Delta^2 Z_t$ entstehen durch die Differenzenbildung?

c) Es sei nun $\theta_1 = \theta_2 = 1$. Berechnen Sie die Werte der ACVF und ACF von ΔZ_t bis zum Lag $h = 4$.

d) Sei nun $\theta_2 = 0$. Für welche $\theta_1 > 0$ ist dann die erste Differenz ΔZ_t von Z_t invertierbar bzgl. ε?

Aufgabe 6 (4 + 12 = 16 Punkte)

Sind X und Y stochastisch unabhängige ARMA(p_X, q_X)-bzw. ARMA(p_Y, q_Y)-Prozesse, so ist $X + Y$ ein ARMA(p, q)-Prozess mit $p \leq p_X + p_Y$ und $q \leq \max(p_X + q_Y, p_Y + q_X)$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass

   i) die Summe zweier MA-Prozesse MA(q_1) und MA(q_2) $(q_1, q_2 \neq 0)$ wieder zu einem MA(q)-Prozess führt. Welche Bedingung gilt für die Ordnung q des entstehenden Prozesses?

   ii) die Summe zweier AR-Prozesse AR(p_1) und AR(p_2) $(p_1, p_2 \neq 0)$ zu einem ARMA(p, q)-Prozess führt. Welche Bedingungen sind hier an die Ordnungen p und q gestellt?

b) Es seien für $|\phi| < 1$ die beiden AR(1)-Prozesse X_t und Y_t gegeben durch

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad Y_t = -\phi Y_{t-1} + \nu_t \ ,$$

   wobei ε_t und ν_t voneinander unabhängige Weiße Rauschen sind mit gleicher Varianz σ^2. Betrachten Sie nun den Prozess $Z_t := X_t + Y_t$.

   i) Zeigen Sie, dass $Z_t - \phi^2 Z_{t-2} = Q_t$ gilt mit $Q_t := \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \nu_t - \phi\nu_{t-1}$.

   ii) Weisen Sie nach, dass es sich bei Q_t um ein Weißes Rauschen handelt.

   iii) Können Sie die Aussage aus Aufgabenteil a) ii) am Beispiel von Z_t verifizieren? Von welchem Typ ist der Prozess Z_t genauer?

Bitte nicht vergessen:

- Platzkarte auf das Klausurheft kleben!
- Name, Vorname sowie die Matrikelnummer auf das Deckblatt dieser Aufgabensammlung schreiben!
- Diese Aufgabensammlung mit dem Klausurheft **abgeben**!