

Diplomprüfung
Finanzmarktökonomie: Zeitreihenanalyse
Sommersemester 2008
Dr. Martin Becker

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

B i t t e b e a c h t e n S i e F o l g e n d e s :

1. Kleben Sie bitte Ihr Namensschild auf die dafür vorgesehene Markierung **auf dem Deckblatt des Klausurhefts!**
2. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an den dafür vorgesehenen Stellen **auf das Deckblatt der Aufgabensammlung (diese Seite)!**
3. Legen Sie einen Lichtbildausweis an Ihrem Platz aus.
4. Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben mit insgesamt 120 Punkten. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
5. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben kann beliebig gewählt werden.
6. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
7. Die Benutzung von zwei beidseitig beschriebenen bzw. vier einseitig beschriebenen DIN A4-Blättern sowie Taschenrechnern ist erlaubt.
8. **Aufgabe 1 ist in der Aufgabensammlung zu bearbeiten. Die Aufgabensammlung ist daher zusammen mit dem Klausurheft abzugeben!**

1. Aufgabe (30 Punkte)

Zu den folgenden Aussagen ist anzugeben, ob sie wahr oder falsch sind. Eine korrekte Antwort wird dabei mit **+3** Punkten bewertet, eine falsche mit **-1** Punkt. Aussagen, zu denen keine Stellung genommen wird, werden mit **0** Punkten bewertet. Sollte eine negative Gesamtpunktzahl entstehen, überträgt diese sich **nicht** auf die anderen Aufgaben, die Aufgabe geht dann mit einer Punktzahl von Null in die Gesamtbewertung ein.

- | | wahr | falsch |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Ist die bedingte Erwartung $E(Y X_1, \dots, X_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) linear in $X_1, \dots, X_n$, so stimmt $E(Y X_1, \dots, X_n)$ mit der besten linearen Prognose $P(Y X_1, \dots, X_n)$ überein. | ☐ | ☐ |
| 2. Jeder schwach stationäre Prozess ist mittelwertergodisch. | ☐ | ☐ |
| 3. MA(q)-Prozesse sind stets schwach stationär. | ☐ | ☐ |
| 4. Jeder Markov-Prozess ist auch ein Martingal. | ☐ | ☐ |
| 5. Gilt für einen schwach stationären Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ | ☐ | ☐ |
| $\Delta_n(1) = 0$ | | |
| für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$, so ist X deterministisch. | | |
| 6. Jeder kausale ARMA(1,1)-Prozess hat eine MA(∞)-Darstellung. | ☐ | ☐ |
| 7. Das korrigierte Akaike Informationskriterium AIC_C zählt zu den konsistenten Modellselektionskriterien für ARMA(p, q)-Modelle, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass die geschätzten Modellordnungen $\hat{p}$ und $\hat{q}$ mit den tatsächlichen Ordnungen p und q übereinstimmen, konvergiert mit wachsendem Stichprobenumfang gegen 1. | ☐ | ☐ |
| 8. Mit dem Ljung-Box-Test wird getestet, ob ein Weißes Rauschen unabhängig ist. | ☐ | ☐ |
| 9. Jeder GARCH(p, q)-Prozess ist ein Weißes Rauschen. | ☐ | ☐ |
| 10. Addiert man zu einem Weißen Rauschen ein hiervon unabhängiges Weißes Rauschen, so erhält man wieder ein Weißes Rauschen. | ☐ | ☐ |

2. Aufgabe (3 + 5 + 4 + 8 + 4 = 24 Punkte)

- a) Untersuchen Sie die folgenden (stationären) Prozesse jeweils auf Kausalität und Invertierbarkeit bzgl. des Weißen Rauschens ε :

i) $X_t = \frac{4}{3} X_{t-1} + \frac{4}{3} X_{t-2} + \varepsilon_t$,

ii) $X_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} - \frac{4}{9} \varepsilon_{t-2} + \frac{2}{9} \varepsilon_{t-3}$,

Hinweis: 2 ist Nullstelle des zugehörigen MA-Polynoms!

iii) $X_t = -\frac{3}{2} X_{t-1} + \varepsilon_t + \frac{4}{10} \varepsilon_{t-1} + \frac{4}{10} \varepsilon_{t-2}$.

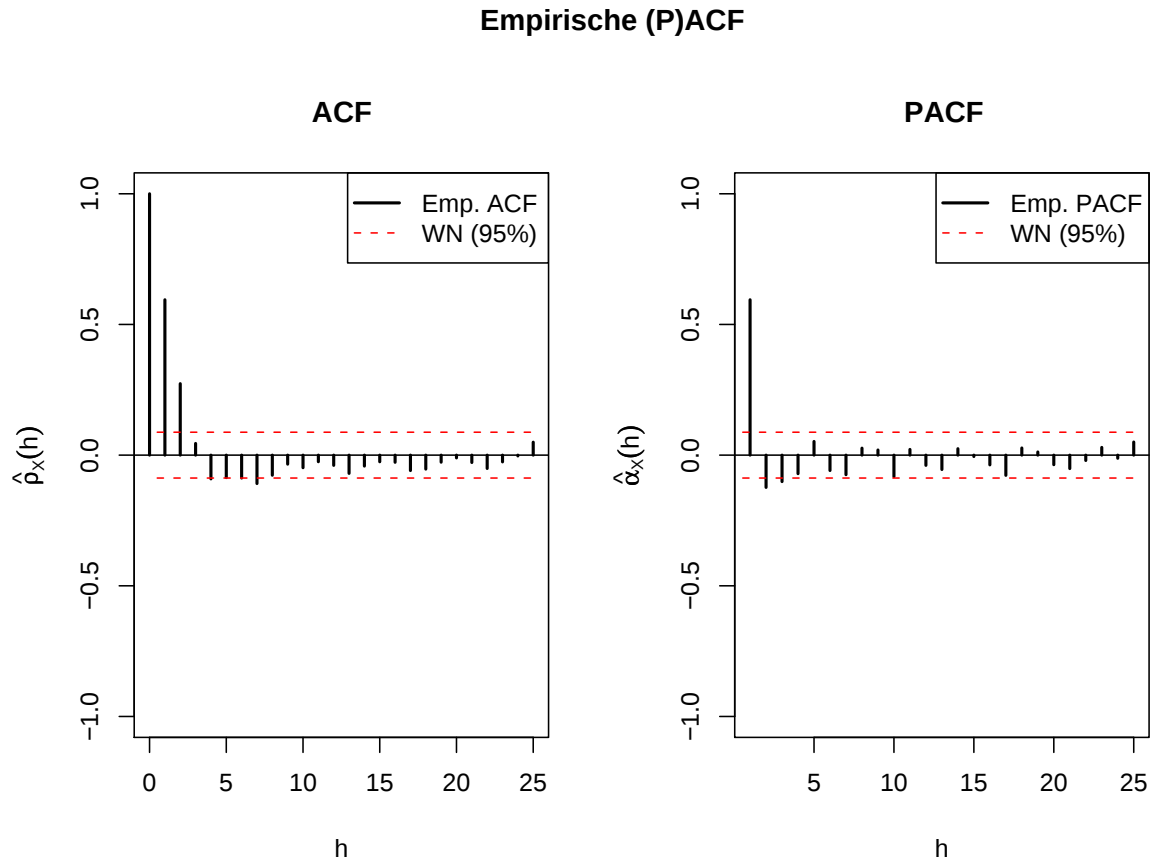
- b) Zu einem (als kausal angenommenen) AR(2)-Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ liegen die folgenden Schätzungen aus einer beobachteten Zeitreihe vor:

$$\hat{\rho}_X(1) = 0.6805 \quad \hat{\rho}_X(2) = 0.6115$$

- i) Bestimmen Sie die Schätzer $\hat{\phi}_1$ und $\hat{\phi}_2$ nach der Yule-Walker-Methode.
- ii) Bestimmen Sie *unter der Annahme, dass der Prozess ein (kausaler) AR(2)-Prozess ist*, für alle $h \in \mathbb{N}$ Schätzwerte $\hat{\alpha}_X(h)$ für die PACF von X .

3. Aufgabe (2 + 4 + 8 + 4 + 6 = 24 Punkte)

Zu einem beobachteten Pfad der Länge $n = 500$ eines stochastischen Prozesses liegen zunächst die empirische ACF sowie die empirische PACF in Form der folgenden Grafik vor:



- Würden Sie anhand der empirischen ACF/PACF eher annehmen, dass der beobachtete Pfad von einem (stationären) $\text{ARMA}(p, q)$ – Prozess stammt oder würden Sie eher von einem (integrierten) $\text{ARIMA}(p, 1, q)$ – Prozess ausgehen? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Welche Modellordnung (p, q) würden Sie auf Grundlage der (Gestalt der) empirischen ACF annehmen, welche Modellordnung auf der Grundlage der empirischen PACF? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Die ersten Werte der empirischen Autokorrelationsfunktion aus der obigen Grafik sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

h	0	1	2	3	4	5
$\hat{\rho}(h)$	1.0000	0.5944	0.2734	0.0447	-0.0910	-0.0860

Führen Sie auf Grundlage der angegebenen Werte einen Box-Pierce-Test zum maximalen Lag $m = 5$ durch (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$). Was testet der Box-Pierce-Test und zu welcher Entscheidung gelangt er in der vorliegenden Situation?

Hinweis: Für die Entscheidung stehen Ihnen die folgenden 95%-Quantile der $\chi^2(k)$ -Verteilung zur Verfügung:

k	1	2	3	4	5	6	7
$\chi^2_{k;0.95}$	3.8415	5.9915	7.8147	9.4877	11.0705	12.5916	14.0671

- d) Könnten Sie auch den McLeod-Li-Test mit den vorliegenden Daten durchführen? In welchem Zusammenhang steht der McLeod-Li-Test zum Ljung-Box-Test? Könnten Sie den Ljung-Box-Test mit den vorliegenden Daten durchführen?
- e) Auf der Grundlage des beobachteten Pfades wurden Maximum-Likelihood-Schätzungen von ARMA(p, q) - Modellen verschiedener Ordnungen durchgeführt und daraus die zugehörigen Werte für das AIC- sowie das SIC- Modellselektionskriterium wie folgt berechnet:

- AIC-Kriterium:

$p \backslash q$	0	1	2	3	4
0	3.29952	2.93921	2.87391	2.84043	2.84169
1	2.86525	2.85720	2.85554	2.84264	2.83136
2	2.85343	2.84329	2.84658	2.84445	2.83474
3	2.84772	2.84630	2.84982	2.84302	2.83821

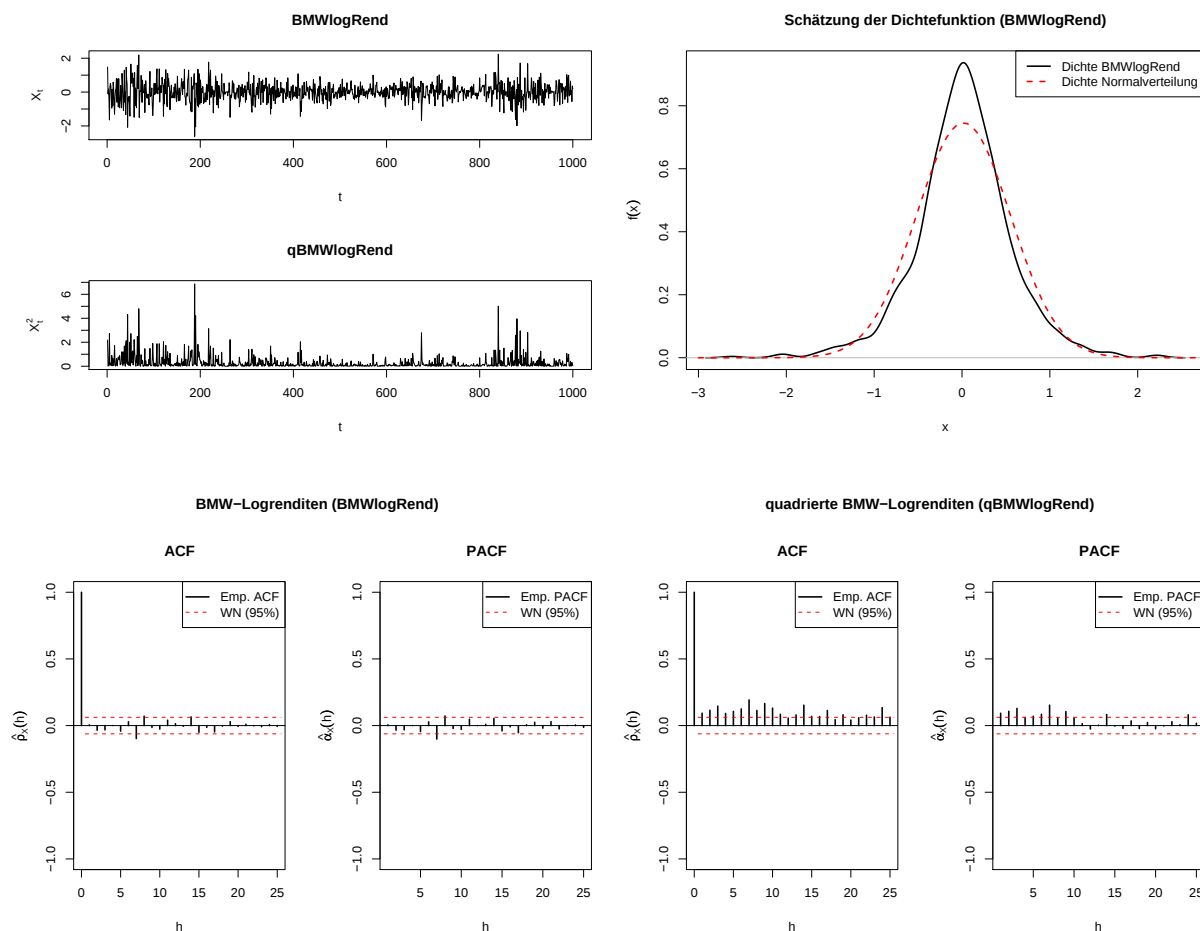
- SIC-Kriterium:

$p \backslash q$	0	1	2	3	4
0	3.29952	2.94764	2.89077	2.86572	2.87541
1	2.87368	2.87406	2.88083	2.87636	2.87351
2	2.87029	2.86858	2.88030	2.88660	2.88532
3	2.87301	2.88002	2.89196	2.89359	2.89721

Welches Modell wird durch das AIC-Kriterium ausgewählt? Welches durch das SIC-Kriterium? Wird das SIC-Kriterium die Modellordnung (p, q) bei Vorliegen eines ARMA(p, q)-Modells konsistent schätzen?

4. Aufgabe (10 + 4 + 8 = 22 Punkte)

Aus den Schlusskursen der BMW-Aktie des Zeitraums vom 01.01.2003 bis 01.11.2006 wurden die Zeitreihen der 1000 resultierenden Log-Renditen (BMWlogRend) sowie der zugehörigen quadrierten Log-Renditen (qBMWlogRend) berechnet. Hierzu stehen die folgenden Plots zur Verfügung:



- Benennen und erläutern Sie kurz möglichst viele „Stylized Facts“ von Finanzmarktdaten. Gehen Sie auch jeweils darauf ein, inwiefern die oben angegebenen Grafiken auf das Auftreten dieser Stylized Facts bei den Log-Renditen der BMW-Aktie schließen lassen.
- Mit der Software R wurden Ljung-Box-Tests für BMWlogRend sowie qBMWlogRend mit folgendem Ergebnis durchgeführt:

Box-Ljung test

```
data: BMWlogRend
X-squared = 4.1057, df = 5, p-value = 0.5343
```

Box-Ljung test

```
data:  qBMWlogRend
X-squared = 63.1666, df = 5, p-value = 2.689e-12
```

Welche typischen Eigenschaften von Finanzzeitreihen werden durch diese Testergebnisse gestützt? Können Sie auf Grundlage der Testergebnisse davon ausgehen, dass „ARCH-Effekte“ vorliegen?

- c) Die Schätzung eines GARCH(1,1)-Modells für BMWlogRend lieferte folgenden (gekürzten) Output:

```
Call:
garch(x = BMWlogRend, order = c(1, 1))

Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.88682 -0.55662  0.02190  0.62762  4.42577

Coefficient(s):
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
a0  0.003752    0.001289   2.912  0.00359 **
a1  0.062183    0.009873   6.298 3.01e-10 ***
b1  0.924355    0.011704  78.978 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1 1

Diagnostic Tests:
```

Box-Ljung test

```
data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.0551, df = 1, p-value = 0.8145
```

Geben Sie das geschätzte GARCH(1,1)-Modell an. Ist die Varianz im geschätzten Modell endlich? Interpretieren Sie kurz das Ergebnis des im Output enthaltenen Ljung-Box-Tests.

5. Aufgabe (12 + 4 + 4 = 20 Punkte)

In der Praxis werden stochastische Prozesse häufig zeitlich aggregiert beobachtet, d.h. anstelle von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ beobachtet man den aggregierten Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = X_{ta} + X_{ta-1} + \dots + X_{ta-(a-1)} ,$$

wobei jeweils über a Zeitpunkte aggregiert wird.

Beispielsweise entstehen so im Fall $a = 5$ Wochenrenditen Y_t eines Wertpapiers durch Aggregation der Tagesrenditen X_t von jeweils 5 Handelstagen (Montag bis Freitag), d.h. man erhält:

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_1 & = & X_5 + X_4 + X_3 + X_2 + X_1 \\ Y_2 & = & X_{10} + X_9 + X_8 + X_7 + X_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

- a) Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sei schwach stationär mit Erwartungswert μ_X und Autokovarianzfunktion $\gamma_X(h)$. Zeigen Sie, dass dann auch $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist, und geben Sie den Erwartungswert μ_Y und die Autokovarianzfunktion $\gamma_Y(h)$ in Abhängigkeit von μ_X und $\gamma_X(h)$ an.
- b) Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sei nun spezieller ein Weißes Rauschen. Ist dann auch $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stets ein Weißes Rauschen? Begründen Sie Ihre Antwort!
- c) Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sei nun spezieller ein MA(1)-Prozess. Ist dann auch $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stets ein MA(1)-Prozess? Begründen Sie Ihre Antwort!