Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungssekretariat

Diplomprüfung

Finanzmarktökonometrie: Zeitreihenanalyse

Sommersemester 2007

Dr. Stefan Klößner

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

B i t t e   b e a c h t e n   S i e   F o l g e n d e s:

1. Kleben Sie bitte Ihr Namensschild auf die dafür vorgesehene Markierung **auf dem Deckblatt des Klausurhefts**!
2. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an den dafür vorgesehenen Stellen **auf das Deckblatt der Aufgabensammlung (diese Seite)**!
3. Legen Sie einen Lichtbildausweis an Ihrem Platz aus.
4. Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben mit insgesamt 120 Punkten. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
5. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben kann beliebig gewählt werden.
6. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
7. Die Benutzung von zwei beidseitig beschriebenen bzw. vier einseitig beschriebenen DIN A4-Blättern sowie Taschenrechnern ist erlaubt.
8. **Aufgabe 1 ist in der Aufgabensammlung zu bearbeiten. Die Aufgabensammlung ist daher zusammen mit dem Klausurheft abzugeben!**

1. Aufgabe (30 Punkte)

Zu den folgenden Aussagen ist anzugeben, ob sie wahr oder falsch sind. Eine korrekte Antwort wird dabei mit **+3** Punkten bewertet, eine falsche mit **-1** Punkt. Aussagen, zu denen keine Stellung genommen wird, werden mit **0** Punkten bewertet. Sollte eine negative Gesamtpunktzahl entstehen, überträgt diese sich **nicht** auf die anderen Aufgaben, die Aufgabe geht dann mit einer Punktzahl von Null in die Gesamtbewertung ein.

		wahr	falsch
1.	Subtrahiert man von einem Weißen Rauschen ein hiervon unabhängiges Weißes Rauschen, so erhält man wieder ein Weißes Rauschen.	☐	☐
2.	Ein Gaußsches Weißes Rauschen kann (G)ARCH-Effekte aufweisen.	☐	☐
3.	Differenziert man einen Random Walk $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ohne Drift, so erhält man ein Weißes Rauschen.	☐	☐
4.	Jedes Martingal ist auch ein Markov-Prozess.	☐	☐
5.	Sind X und Y unabhängig, so liefert X keinen Beitrag zur linearen Prognose von Y.	☐	☐
6.	Ein rein nicht-deterministischer Prozess ist nicht linear.	☐	☐
7.	Für deterministische Prozesse ist eine Prognose nicht sinnvoll.	☐	☐
8.	Jeder AR(1)-Prozess der Form $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ besitzt eine MA(∞)-Darstellung bezüglich des Weißen Rauschens ε.	☐	☐
9.	Die Differenz zweier unabhängiger AR-Prozesse ist ebenfalls ein AR-Prozess.	☐	☐
10.	Die Kurtosis von Finanzmarkt-Renditen ist typischerweise größer als 3.	☐	☐

2. Aufgabe (4 + 6 + 4 + 4 + 12 = 30 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgenden ARMA-Prozesse jeweils auf Kausalität und Invertierbarkeit bzgl. des Weißen Rauschens ε:

i) $X_t = -\frac{1}{5}\, X_{t-1} - \frac{7}{10}\, X_{t-2} + \varepsilon_t,$

ii) $X_t = \frac{2}{5}\, X_{t-1} - \frac{1}{25}\, X_{t-2} + \varepsilon_t + \frac{1}{5}\, \varepsilon_{t-1} - \frac{12}{25}\, \varepsilon_{t-2},$

iii) $X_t = -\frac{1}{5}\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \frac{19}{10}\, \varepsilon_{t-1} + \frac{22}{25}\, \varepsilon_{t-2},$

b) Betrachten Sie nun den bzgl. ε kausalen und invertierbaren ARMA-Prozess

$$X_t = \frac{1}{4}\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \frac{1}{4}\, \varepsilon_{t-1} + \frac{3}{4}\, \varepsilon_{t-2}.$$

i) Bestimmen Sie die Koeffizienten ψ_0, ψ_1 und ψ_2 in der MA(∞)-Darstellung von X: $X = \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$.

ii) Benutzen Sie die allgemein für kausale ARMA(p, q)-Prozesse geltende Formel

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \phi_1 \gamma_X(h-1) + \cdots + \phi_p \gamma_X(h-p) + \sigma_\varepsilon^2 \sum\limits_{l=h}^{q} \theta_l \psi_{l-h} \ , & 0 \leq h \leq q \\ \phi_1 \gamma_X(h-1) + \cdots + \phi_p \gamma_X(h-p) \ , & h > q \end{cases},$$

um die Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion von X zu bestimmen.

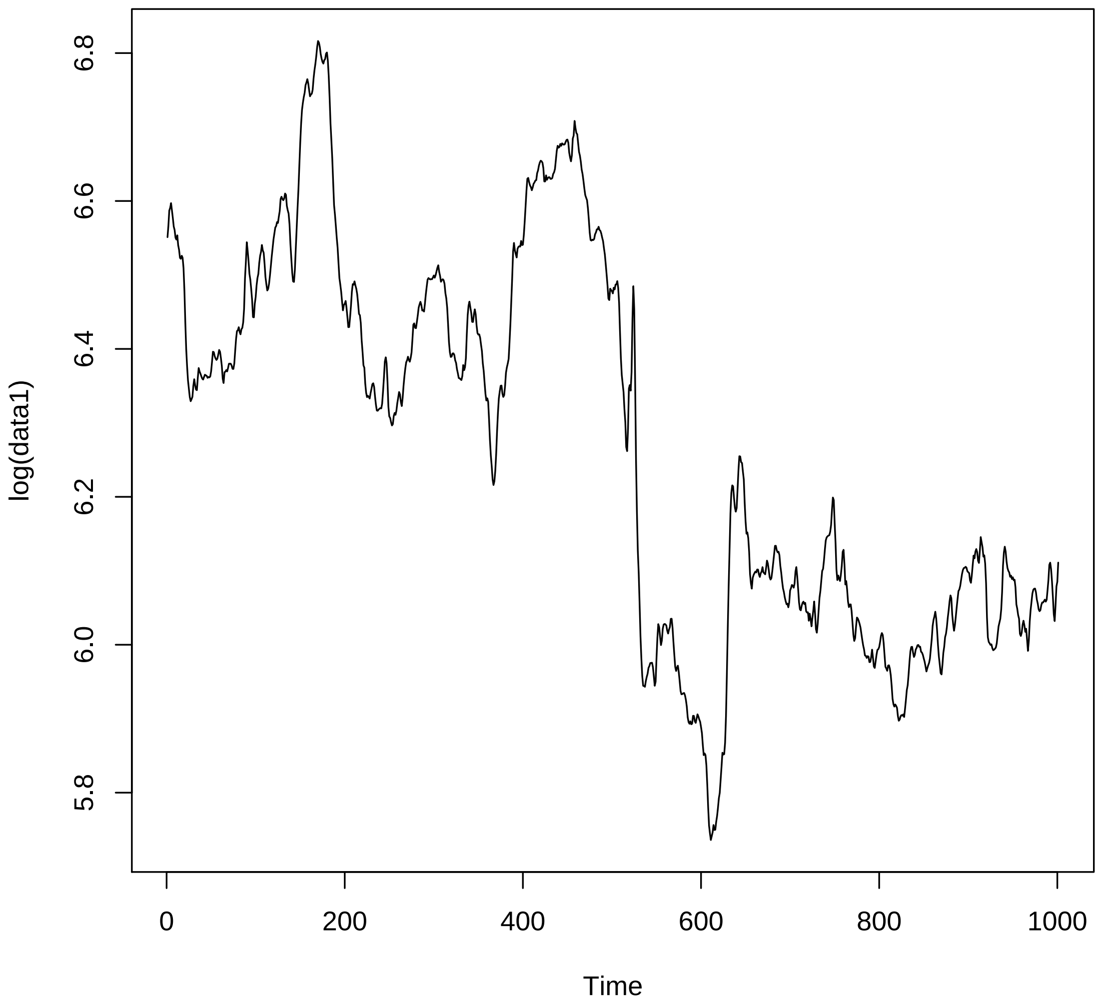
3. Aufgabe (4 + 8 = 12 Punkte)

a) Erläutern Sie kurz, was man unter (G)ARCH-Effekt versteht.

b) Benennen und erläutern Sie kurz möglichst viele „Stylized Facts“ von Finanzmarktdaten.

4. Aufgabe (4 + 4 + 4 + 6 = 18 Punkte)

a) Begründen Sie durch Argumentation anhand der folgenden Grafik, die den logarithmierten Wert-Verlauf einer fiktiven Aktie über einen Zeitraum von 1000 Tagen darstellt, warum die logarithmierten Werte dieser Aktie vermutlich nicht von einem sogenannten Constant Mean Prozess der Form $X_t = \mu + \varepsilon_t$ (dabei ist ε_t ein Weißes Rauschen) stammen.



b) Mit Hilfe der Software R wurde ein Dickey-Fuller-Test auf die logarithmierten Werte der Aktie angewandt:

```
          Augmented Dickey-Fuller Test

data:  log(data1)
Dickey-Fuller = -2.5214, Lag order = 9, p-value = 0.3576
alternative hypothesis: stationary
```

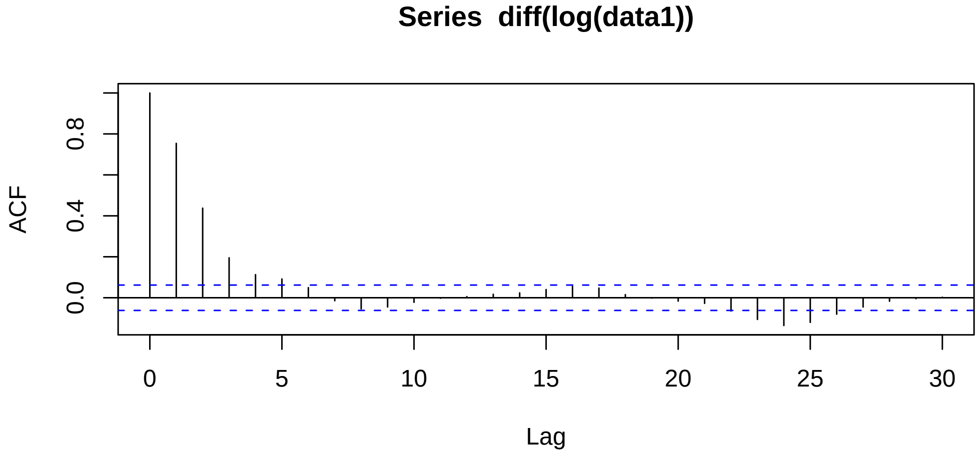
Wie sind diese Ergebnisse zum Signifikanzniveau von 5% zu bewerten? Welchen Verlauf vermuten Sie für die geschätzte ACF der logarithmierten Werte?

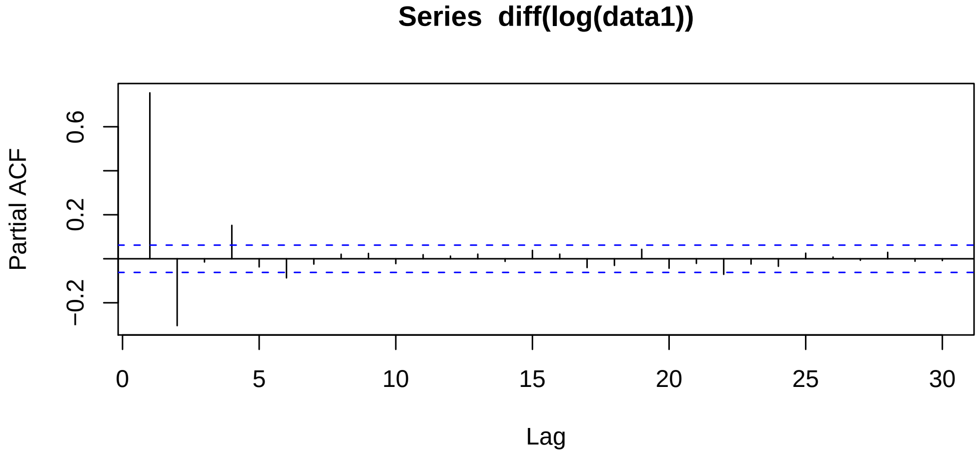
c) Aufgrund der Ergebnisse aus b) wurden die Logarithmen differenziert und dann erneut ein Dickey-Fuller-Test angewandt:

```
                 Augmented Dickey-Fuller Test

data:  diff(log(data1))
Dickey-Fuller = -8.9064, Lag order = 9, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary

Warning message:
p-value smaller than printed p-value in: adf.test(diff(log(data1)))
```

Entscheiden Sie zum Signifiknzniveau 5% über die Stationarität der Tagesrenditen dieser Aktie. Was bedeutet dies für die Zeitreihe der logarithmierten Werte?

d) Nehmen Sie an, dass die Tagesrenditen der Aktie von einem ARMA-Prozess stammen. Welchem Prozess folgen dann die logarithmierten Aktien-Werte? Entscheiden Sie anhand der nachfolgenden Grafik darüber, ob AR(p) bzw. MA(q)-Prozesse für die Tagesrenditen in Frage kommen oder ob es sich um einen „echten“ ARMA-Prozess handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung!





5. Aufgabe (1 + 1 + 4 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 = 30 Punkte)

Beachten Sie: jede der folgenden Teilaufgaben kann mit Hilfe der (bis auf Teil b)) angegebenen Zwischen-Ergebnisse der vorhergehenden Teilaufgaben gelöst werden!

Es sei X mit $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$ und $\sigma_t^2 = 2 + \frac{2}{5} X_{t-1}^2 + \frac{1}{5} X_{t-2}^2$ ein ARCH(2)-Prozess mit Innovationen, deren Exzess-Kurtosis 1 beträgt.

a) Bilden in diesem Modell die Innovationen ein Gaußsches Weißes Rauschen?

b) Bestimmen Sie die Varianz von X.

c) Begründen Sie – die Existenz entsprechender Momente vorausgesetzt – folgende Formel:

$$E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2) = E(\sigma_{t-1}^2 X_{t-2}^2).$$

d) Leiten Sie – die Existenz entsprechender Momente vorausgesetzt – für $E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2)$ mit Hilfe von c) folgende Formel her:

$$E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2) = 10 + \frac{2}{5} E(X_t^4) + \frac{1}{5} E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2).$$

e) Folgern Sie – die Existenz entsprechender Momente vorausgesetzt – aus d):

$$E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2) = \frac{25}{2} + \frac{1}{2} E(X_t^4).$$

f) Begründen Sie – die Existenz entsprechender Momente vorausgesetzt – folgende Formel:

$$E(X_t^4) = 4\, E(\sigma_t^4).$$

g) Leiten Sie für $E(\sigma_t^4) = E((\sigma_t^2)^2)$ – die Existenz entsprechender Momente vorausgesetzt – folgende Formel her:

$$E(\sigma_t^4) = 16 + \frac{4}{25} E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2) + \frac{1}{5} E(X_t^4).$$

h) Folgern Sie – die Existenz entsprechender Momente vorausgesetzt – aus f) und g):

$$E(X_t^4) = 320 + \frac{16}{5} E(X_{t-1}^2 X_{t-2}^2).$$

i) Welches Problem tritt auf, wenn Sie e) und h) benutzen, um $E(X_t^4)$ zu bestimmen? Was schließen Sie daraus?